RÉSUMÉ DU PROGRAMME DE RECHERCHE

LOUIS MERLIN

[1]

Le tout premier problème mathématique auquel je me suis intéressé est un problème inverse : peut on reconstruire une métrique riemannienne à partir de la dynamique de son flot géodésique ? Ou plutôt quelles sont les informations géométriques que contient la dynamique ? Une première approche (naïve) suggère une réponse positive : le flot connait toutes les longueurs des géodésiques fermées (les périodes du flot) et cela permet de caractériser une unique métrique.

La conjecture d'entropie minimale est une profonde amélioration de ce procédé de reconstruction d'une métrique riemannienne. On suppose cette fois que l'on connait seulement un invariant de la dynamique, son entropie. Et on suppose aussi que la structure différentiable sur laquelle vit le flot supporte une métrique de référence, une métrique symétrique. Peut on alors reconnaître la géométrie symétrique uniquement avec l'entropie de son flot ? En m'appuyant sur l'influent article, [BCG95], j'ai démontré pendant ma thèse le résultat suivant.

Théorème 1 ([Mer16b])**.** *Soit (M, g_0) une métrique riemannienne complète, localement isométrique à un produit de plans hyperboliques $\left(\mathbb{H}^2\right)^n$ et soit g une autre métrique quelconque sur M. Alors*

$$h(g_0)^{2n}\operatorname{Vol}(g_0) \leqslant h(g)^{2n}\operatorname{Vol}(g)$$

où $h(g)$ est l'entropie de la métrique g et $\operatorname{Vol}(g)$ son volume.

La preuve est basée sur des techniques qui viennent de la théorie des surfaces minimales et de cohomologie bornée.

Mon activité de recherche principale consiste en l'étude d'invariants globaux des variétés riemanniennes, comme l'entropie ou le volume; mais aussi la systole, la constante de Margulis, le "filling radius", l'ensemble limite du groupe fondamental ou la cohomologie (bornée)... Les espaces symétriques jouent un rôle prépondérant. Plus récemment, l'environnement géométrique limité aux seules variétés riemanniennes est devenu trop étroit et je m'intéresse aussi à des situations purement métriques, comme la géométrie de Hilbert (abordée avec des outils de théorie de la mesure) ou la géométrie des immeubles affines (abordée avec des outils de théorie géométrique des groupes). Le genre de questions qui me fascinent sont les phénomènes de rigidité/flexibilité : quel objet mathématique est rigide (et pourquoi ?) et quel autre et flexible (et jusqu'à quel point ?).

Ces trois aspects de mes motivations scientifiques (invariants globaux des variétés riemanniennes, géométrie métrique et les phénomènes de rigidité/flexibilité) sont les trois lignes directrices de mon programme de recherche. J'en décris maintenant les projets les plus excitants.

Dans un travail avec Florent Balacheff (Barcelone), nous faisons le lien entre entropie volumique et bas du spectre des longueurs [BM19]. Nous cherchons à appliquer le résultat obtenu de la manière suivante : considérons un invariant riemannien qui est défini en fonction du spectre des longueurs (nous pensons par exemple à l'invariant N_{fr} de Gromov [Gro09]) et à un autre invariant dont on connait ses relations avec l'entropie. Notre travail nous permet de faire le lien entre ces deux invariants.

Revenant à la conjecture d'entropie minimale, même si un énoncé qui impliquerait un espace symétrique générique semble pour l'instant hors d'atteinte, il y a deux cas où on peut développer une stratégie.

[1]Une version complète de ce programme de recherche avec des énoncés et des stratégies précises est aussi disponible.

L'espace de Siegel a beaucoup de sa géométrie en commun avec $\left(\mathbb{H}^2\right)^n$. Quelques ressemblances cohomologiques permettent d'envisager de réutiliser la preuve du théorème 1 dans ce cas. Un projet plus ambitieux (puisqu'il contient le cas de l'espace de Siegel) serait de s'attaquer aux espaces symétriques hermitiens. En effet, la structure symplectique additionnelle qui vient de la géométrie complexe trouve une place naturelle dans la stratégie de preuve. Elle permet en effet de mettre en évidence des sous-variétés minimales.

Les géométries de Hilbert sont des déformations projectives de la géométrie hyperbolique. Elle sont naturellement métrisées par une distance Finslérienne. L'espace métrique consiste en fait en une distance invariante par transformations projectives sur un convexe de $\mathbb{RP}^n$. Dans un travail en collaboration avec Jan Cristina (Lausanne), nous développons des techniques de théorie géométrique de la mesure pour étudier des géométries de Hilbert de basse régularité (c'est-à-dire quand le bord du convexe n'est pas lisse). Ces techniques sont largement réutilisables et l'étude de ces géométries de Hilbert de basse régularité n'en est qu'à ses débuts. Nos outils sont pensés pour étudier des propriétés de croissance dans ces convexes (du volume des boules, de la taille d'un polyèdre d'approximation...)

Dans un projet en cours et en collaboration avec Jean-Marc Schlenker (Luxembourg), nous étudions les relations de la géométrie polyèdrale avec la géométrie de Hilbert et la géométrie hyperbolique. Ce projet comporte donc deux volets.

Un premier aspect consiste à étudier la structure de *l'extérieur* d'un convexe avec pour objectif de proposer une extension de la géométrie de Sitter pour les géométries de Hilbert. Nous définissons une distance en approchant le convexe par un ensemble algébrique, puis en complexifiant cet ensemble algébrique (la distance que l'on obtient est en fait à valeurs complexes). Les propriétés élémentaires de la géométrie algébrique sur un corps clos nous permet de prolonger la définition usuelle de la géométrie de Hilbert. Le fait que l'on obtient bien une distance peut être visualisé sur le dessin suivant, construit à l'aide d'un programme Sagemath (nous travaillons à la preuve abstraite).

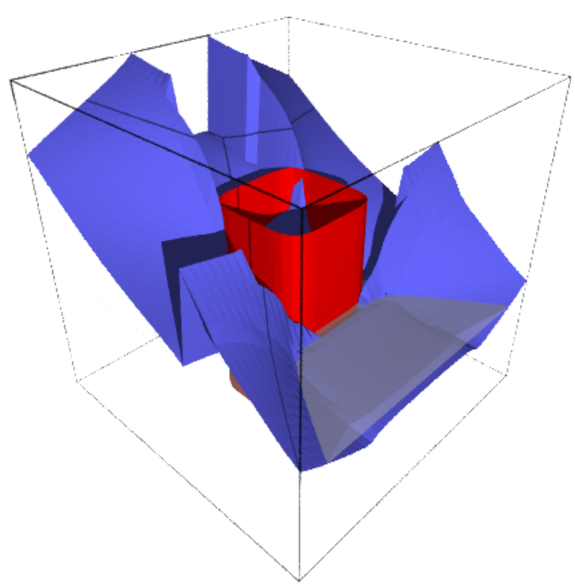

FIGURE 1. Le défaut d'inégalité triangulaire pour une géométrie "de Sitter de Hilbert" de dimension 2. La projection sur le plan xy de la partie rouge est le convexe. La partie grisée est le lieu où on obtient une inégalité triangulaire inverse. Cela est bien consistant avec la géométrie de Sitter usuelle

Nous pensons à plusieurs applications de cette construction. En utilisant un argument de [Sch05], nous pouvons étudier la rigidité de certains polyèdres (non convexes) euclidiens. Dans une perspective plus générale, cela nous permet de définir des angles dièdres pour les arêtes d'un polyèdre en géométrie de Hilbert : la longueur des arêtes du polyèdre dual, qui vit naturellement *à l'extérieur* du convexe dual.

L'autre aspect de ce travail en commun consiste à explorer la "conjecture de Thurston universelle".

Conjecture 2. *Soit (λ^+, λ^-) un couple remplissant*[2] *de laminations mesurées du disque $\mathbb{D}^2$. Alors il existe un quasi-cercle $u : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ tel que son enveloppe convexe dans $\mathbb{H}^3$ est bordée par deux surfaces plissées le long de λ^+ et λ^-.*

Le mot "universelle" fait référence au fait que l'on ne suppose pas que les deux laminations λ^+ et λ^- vivent sur (le revêtement universel d') une surface qui est le bord d'une variété quasi-fuchsienne (la conjecture est résolue dans ce cas là dans [BO04]). L'idée décisive de notre approche consiste à approcher les deux surfaces plissées par des laminations polyédrales (la surface plissée est le bord d'un polyèdre, l'intensité du plissage étant donné par les angles dièdres de ce polyèdre). Ce polyèdre d'approximation nous est donné par le théorème de Rivin [Riv96]. La partie technique de la preuve consiste à montrer que lorsque la complexité du polyèdre augmente, les laminations approchantes convergent bien vers les laminations de départ. L'"équateur" du polyèdre converge alors vers le quasi-cercle cherché.

Dans un premier article en préparation [MS20], nous implémentons cette stratégie dans le cas des quasi-cercles au bord de l'espace Anti-de Sitter, qui est l'analogue lorentzien de l'espace hyperbolique. L'ajustement qui convient dans le cas hyperbolique consiste à montrer un phénomène de "non-bubbling off" [BO04].

Une large généralisation de la notion de représentation quasi-fuchsienne en rang supérieur est donnée par les représentations Anosov (définies de manière dynamique dans [Lab04] ou avec un formalisme de géométrie à grande échelle dans [KLP14]). J'ai identifié dans [Mer16a] les situations dans lesquelles une représentation Anosov est flexible : il s'agit des représentations de groupes de surfaces. Pour continuer l'analyse de la topologie de l'espace des représentations Anosov, je propose d'étudier le comportement d'invariants globaux sur l'espace de modules. Les représentations Anosov jouissent de propriétés typiques des groupes de rang 1 [KLP14] (par exemple le groupe est intrinsèquement Gromov-hyperbolique) et l'enjeu est de comprendre à quelles représentations de rang 1 elles ressemblent le plus. Une frappante dichotomie à propos de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite a été découverte en rang 1. En effet, les variétés convexe-cocompactes hyperboliques réelles ont un ensemble limite dont la dimension peut être arbitrairement proche de $n-1 = \dim \partial_\infty \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ [Sul79], alors que les variétés convexe-cocompactes quaternioniques hyperboliques ont un ensemble limite dont la dimension est uniformément éloignée de $\dim \partial_\infty \mathbb{H}^n_{\mathbb{Q}}$ [Cor90]. En rang supérieur, un théorème de [Qui03] indique que ce serait plutôt le cas quaternionique qui représenterait la situation. Adapter son approche nous permettrait de décider s'il y a un intervalle d'écart entre les dimensions possibles de l'ensemble limite et la dimension de la sphère à l'infini. Noter que le travail récent [GMT19] fait le lien entre la dimension de Hausdorff et un certain exposant critique du groupe.

Enfin, dans un projet récent en collaboration avec U. Hryniewicz et M. Miewes à Aix-la-Chapelle, nous proposons d'étudier la dynamique de certains flots de Reeb avec la motivation de comprendre pour quelles classes de flots (par exemple sur le tangent unitaire d'une surface), l'entropie peut-elle décroître jusqu'à 0 ou au contraire reste-t-elle minorée. Le problème est basée sur deux résultats opposés, l'un affirme que l'entropie des flots géodésiques est minorée, l'autre affirme que l'entropie des flots de Reeb en général ne l'est pas. Nous étudions en priorité les flots géodésiques magnétiques.

References

[BCG95] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geom. Funct. Anal.*, 5(5):731–799, 1995.

[BM19] Florent Balacheff and Louis Merlin. Volume entropy and lengths of homotopically independent loops, 2019.

[2] Chaque courbe assez longue a une intersection positive avec la réunion des deux laminations

[BO04] F Bonahon and J.-P Otal. Laminations mesurées de plissage des variétés hyperboliques de dimension 3. 160:1013–1055, 11 2004.

[Cor90] Kevin Corlette. Hausdorff dimensions of limit sets. I. *Invent. Math.*, 102(3):521–541, 1990.

[GMT19] Olivier Glorieux, Daniel Monclair, and Nicolas Tholozan. Hausdorff dimension of limit sets for projective Anosov representations. *arXiv e-prints*, page arXiv:1902.01844, Feb 2019.

[Gro09] Mikhail Gromov. Singularities, expanders and topology of maps. I. Homology versus volume in the spaces of cycles. *Geom. Funct. Anal.*, 19(3):743–841, 2009.

[KLP14] M. Kapovich, B. Leeb, and J. Porti. Morse actions of discrete groups on symmetric space. *ArXiv e-prints*, March 2014.

[Lab04] Francois Labourie. Anosov flows, surface groups and curves in projective space. *Inventiones mathematicae*, 165, 02 2004.

[Mer16a] L. Merlin. A note on degenerations of Morse actions. *ArXiv e-prints*, December 2016.

[Mer16b] Louis Merlin. Minimal entropy for uniform lattices in product of hyperbolic planes. *Comment. Math. Helv.*, 91(1):107–129, 2016.

[MS20] Louis Merlin and Jean-Marc Schlenker. Bending laminations on convex hull of anti-de sitter quasicircles, 2020.

[Qui03] Jean-François Quint. L'indicateur de croissance des groupes de Schottky. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(1):249–272, 2003.

[Riv96] Igor Rivin. A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space. *Annals of Mathematics*, 143(1):51–70, 1996.

[Sch05] Jean-Marc Schlenker. A rigidity criterion for non-convex polyhedra. *Discrete Comput. Geom.*, 33(2):207–221, 2005.

[Sul79] Dennis Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50):171–202, 1979.